0.1 Tor and Ext

Drived fanctor と聞いて思い起こすのは淡い青春の日々……ではなく、torsion 加群や extension 加群である。

Proposition 0.1.1

M を R-module とする。このとき、M と tensor 積をとる関手

$$F = \otimes M : Ch_R \longrightarrow Ch_R$$

は total left derived fanctor を持つ。

proof) cofibrant object 間の acyclic cofibration が weak equivalence に移るかどうかを確かめればよい。

$$i : A \longrightarrow B$$

を cofibrant object 間の acyclic cofibration とする。

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow B/A \longrightarrow 0$$

は i が cofibration より、分解する短完全列で、$B \cong A \oplus B/A$ である。また、この短完全列からホモロジー群の長い完全列を誘導すると、i が weak equivalence より、$H_*(B/A) = 0$ となり、B/A は acyclic である。思い起こすと、acyclic で projective module からなる chain complex は P_k を projective module として、$B/A \cong \oplus_{k \geqq 1} D(P_k, k)$ という分解があった。これにより、$D(P_k, k) \otimes M$ も acyclic であるため、

$$H_*(B/A; M) \cong \oplus H_*(D(P_k, k); M) = 0$$

よって、

$$0 \longrightarrow A \otimes M \longrightarrow B \otimes M \longrightarrow B/A \otimes M \longrightarrow 0$$

から誘導されるホモロジー完全列により、

$$F(i) : A \otimes M \longrightarrow B \otimes M$$

は weak equivalence であることがわかる。

□

Remmark 0.1.2

R-module である M と A に対し、$\mathrm{Tor}(A, M)$ の定義を思い返そう。A の射影的分解、

$$\cdots \longrightarrow C_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

を考えたとき、このとき chain complex である $C \otimes M$ のホモロジー群が $\mathrm{Tor}_*(A, M)$ であった。

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

の図式を考えれば、ホモロジー群を取ると一致する。つまり、$C \longrightarrow K(A, 0)$ は weak equivalence である。つまり、$\mathrm{Ho}(Ch_R)$ 上で $C \cong K(A, 0)$ である。よって、$\mathbf{L}F(C) \cong \mathbf{L}F(K(A, 0))$。また C は cofibrant であるので、$\mathbf{L}F(C) \cong F(C)$ を踏まえると、$\mathrm{Ho}(Ch_R)$ 上で $\mathbf{L}F(K(A, 0)) \cong F(C)$ である。つまり、Ch_R 上では $\mathbf{L}F(K(A, 0)) \sim F(C)$ であるので、ホモロジー群を取ると同型になる。つまり、

$$H_*(\mathbf{L}F(K(A, 0))) \cong H_*(F(C)) = \mathrm{Tor}_*(A, M)$$

となる。

Tor について考えたのなら、Ext についても考えたい。双対の概念を踏まえるならば fibrant、そして right derived fanctor が関わってくるのは容易に想像がつく。

Proposition 0.1.3

M を R-module とする。このとき、M と Hom をとる関手

$$G = \mathrm{Hom}(\ \ , M) : Ch_R^{op} \longrightarrow Ch_R$$

は total right derived fanctor を持つ。本来なら Hom は反変換手だが、Ch_R^{op} にして共変関手と見ている。

proof)　　fibrant 間の acyclic fibration が weak equivalence に移る事を示せばよい。ここで、Ch_R^{op} における fibration とは cofibration のことであるため、fibrant も cofibrant を意味する。よってこの証明は Prop 0.1.1 を習えばよい。

□

Remmark 0.1.4

R-module である M と A に対し、$\mathrm{Ext}(A,M)$ の定義を思い返そう。A の射影的分解、

$$\cdots \longrightarrow C_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

を考えたとき、このとき cochain complex である $\mathrm{Hom}(C,M)$ のコホモロジー群が $\mathrm{Ext}^*(A,M)$ であった。Remmark 0.1.2 と同じく $C \longrightarrow K(A,0)$ は weak equivalence である。つまり、$\mathrm{Ho}(Ch_R^{op})$ 上で $C \cong K(A,0)$ である。よって、$\mathbf{R}G(C) \cong \mathbf{R}G(K(A,0))$。また C は fibrant であるので、$\mathbf{R}G(C) \cong G(C)$ を踏まえると、$\mathrm{Ho}(Ch_R^{op})$ 上で $\mathbf{R}G(K(A,0)) \cong G(C)$ である。つまり、Ch_R^{op} 上では $\mathbf{R}G(K(A,0)) \sim G(C)$ であるので、コホモロジー群を取ると同型になる。つまり、

$$H^*(\mathbf{R}G(K(A,0))) \cong H^*(G(C)) = \mathrm{Ext}^*(A,M)$$

となる。

$\square$

Theorem 0.1.5

$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(C)}(K(A,0),K(B,n)) \cong \mathrm{Ext}^n(A,B)$ である。

proof) $K(A,0) \sim C$ で C は cofibrant である。よって、

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(C)}(K(A,0),K(B,n)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(C)}(C,K(B,n)) = \pi(C,K(B,n))$$

である。このとき、$K(B,n)$ の good path object である X として、

$$X_i = \begin{cases} B \oplus B & i = n \\ B & i = n-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が考えられる。ただし、$X_n \longrightarrow X_{n-1}$ は $(b_0,b_1) \mapsto b_0 - b_1$ で与えられている。さらにこのとき、$q : K(B,n) \longrightarrow X$ は、$q(b) = (b,b)$ で、$p_i : X \longrightarrow K(B,n)$ （$i = 0,1$ ）$p_i(b_0,b_1) = b_i$ （$i = 0,1$）とする。$K(B,n)$ の path object は X 以外にも考えられるが weak equivalence で同一視できるので問題ない。$f : C \longrightarrow K(B,n)$ において、$f_n : C_n \longrightarrow B$ は、$f_n \circ \partial = 0$ を満たす。逆に言えば、f はこのような $f_n : C_n \longrightarrow B$ からなる。これより、同型

$$\mathrm{Hom}(C,K(B,n)) \longrightarrow \ker\delta \subset \mathrm{Hom}(C_n,B)$$

が、$f \mapsto f_n$ により定まる。また、$f, g \in \mathrm{Hom}(C, K(B,n))$ に対し、$f \overset{r}{\sim} g$ とすると、その right homotopy である $H : C \longrightarrow X$ が存在し、$p_0 \circ H = f$, $p_1 \circ H = g$ を満たす。ここで、

$$H_{n-1} : C_{n-1} \longrightarrow X_{n-1} = B$$

を考える。

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "H_n"'] & C_{n-1} \arrow[d, "H_{n-1}"] \\ X_n \arrow[r, "\partial"'] & X_{n-1} \end{tikzcd}$$

の可換図を考えれば、$H_{n-1} \circ \partial = \partial \circ H_n = f_n - g_n$ これはつまり、$\delta(H_{n-1}) = f_n - g_n$ であるので、$[f_n] = [g_n] \in H^n(C_n; B) = \mathrm{Ext}^n(A,B)$ となり、$\pi^r(C, K(B,n)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n(A,B)$ が導かれ、同型となる。ここで、C は cofibrant であったから、$\pi^r(C, K(B,n)) = \pi(C, K(B,n))$ である。

$\square$